

2. Лабораторная работа № 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

Цель работы

Изучить зависимость момента инерции маятника Обербека от расположения масс на стержнях, используя закон сохранения энергии, и определить собственный момент инерции маятника.

Приборы и принадлежности:

- 1) маятник Обербека;
- 2) набор грузов;
- 3) штангенциркуль;
- 4) линейка;
- 5) секундомер.

Подготовка к работе

По лекциям и приведенному ниже списку литературы изучите следующие вопросы:

- 1) кинематика вращательного движения (величины и их размерности);
- 2) момент инерции твердого тела относительно оси вращения;
- 3) кинетическая энергия вращающегося твердого тела;
- 4) основное уравнение динамики вращательного движения;
- 5) теорема Штейнера.

Вопросы для допуска к работе

1. Дайте определения угловой скорости и углового ускорения.

2. Запишите основное уравнение динамики вращательного движения.
3. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
4. Сформулируйте определения следующих величин: момент импульса, момент инерции, момент силы.
5. Сформулируйте теорему Штейнера.

Теоретическое введение

Понятия момента силы и момента импульса

Из опыта известно, что результат действия силы на тело, имеющее конечные размеры, зависит не только от величины и направления силы, но и от места (точки), к которому она приложена. **Моментом силы** \vec{F} относительно неподвижной точки O (начала координат) называется вектор \vec{M} , определяемый векторным произведением (рис. 2.1):

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}], \quad (2.1)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный от точки O к точке приложения силы (точка A на рис. 2.1).

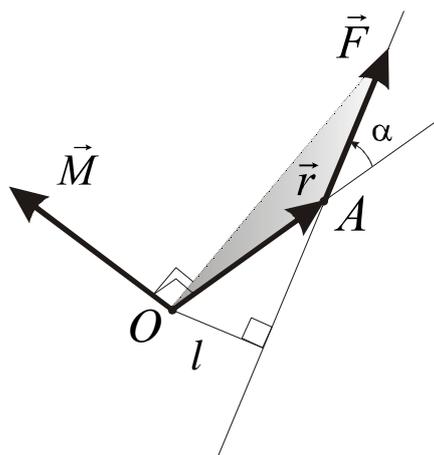


Рис. 2.1. Момент силы \vec{F} относительно точки O

Как всякое векторное произведение, момент силы перпендикулярен обоим образующим его сомножителям, т. е. векторам \vec{r} и \vec{F} , а значит и плоскости, в которой они лежат, и направлен по правилу правого винта («буравчика»). При этом величина (модуль) вектора момента силы определяется по формуле:

$$M = rF \sin \alpha, \quad (2.2)$$

где α – угол между векторами \vec{r} и \vec{F} .

Из рис. 2.1 видно, что расстояние от точки O до прямой, вдоль которой действует сила \vec{F} :

$$l = r \sin \alpha. \quad (2.3)$$

Это расстояние часто называют «плечом» силы \vec{F} и говорят, что «момент равен силе, умноженной на плечо», так как получается, что $M = Fl$.

Заметим, что момент силы относительно точки равен нулю не только, если сила приложена прямо к этой точке (когда $\vec{r} = 0$), но и если прямая, вдоль которой действует сила, проходит через эту точку (тогда $\vec{r} \parallel \vec{F}$, $\alpha = 0$ и $l = 0$).

Совершенно аналогично определяется **момент импульса** материальной точки относительно неподвижной точки O (рис. 2.2):

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}], \quad (2.4)$$

где \vec{r} – радиус-вектор материальной точки;

\vec{p} – ее импульс.

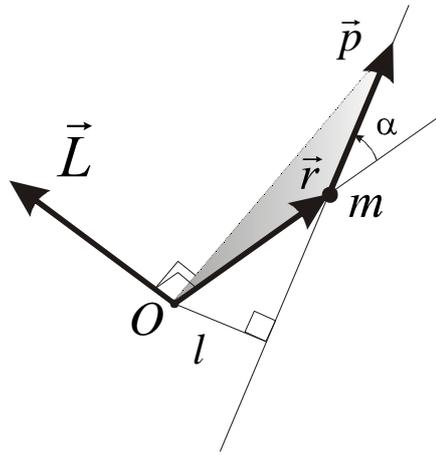


Рис. 2.2. Момент импульса материальной точки m относительно точки O

Если вспомнить определение импульса:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (2.5)$$

где m – масса точки;

\vec{v} – ее скорость,

получим:

$$\vec{L} = m[\vec{r}, \vec{v}]. \quad (2.6)$$

Вектор момента импульса материальной точки перпендикулярен радиусу-вектору и вектору скорости точки, а значит и к плоскости, в которой они лежат, направлен по правилу правого винта («буравчика»). Его величина (модуль) определяется по формуле:

$$L = rp \sin \alpha = rmv \sin \alpha = lmv, \quad (2.7)$$

где α – угол между векторами \vec{r} и \vec{p} , то есть между радиусом-вектором и касательной к траектории точки.

Основное уравнение динамики вращательного движения

Между моментом силы, действующим на тело, и моментом импульса тела существует фундаментальная связь. Дифференцируя момент импульса материальной точки по времени в соответствии с формулой производной произведения, получаем:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}([\vec{r}, \vec{p}]) = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right]. \quad (2.8)$$

Но, по определению скорости тела \vec{v}

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad (2.9)$$

а по II закону Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (2.10)$$

где $\sum_i \vec{F}_i$ – векторная сумма всех сил, действующих на нашу точку.

Таким образом, имеем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{v}, \vec{p}] + \left[\vec{r}, \sum_i \vec{F}_i \right]. \quad (2.11)$$

Но векторы скорости и импульса точки всегда параллельны друг другу, поэтому всегда $[\vec{v}, \vec{p}] = 0$! Второе же слагаемое в правой части уравнения (2.11) есть векторная сумма моментов всех сил (см. (2.1)):

$$\left[\vec{r}, \sum_i \vec{F}_i \right] = \sum_i [\vec{r}, \vec{F}_i] = \sum_i \vec{M}_i.$$

Остается признать, что

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i, \quad (2.12)$$

то есть *скорость изменения момента импульса точки равна результирующему моменту сил*. Это и есть основное уравнение динамики вращательного движения. Сравните с II законом Ньютона (2.10)!

Закон сохранения момента импульса

Используя уравнение (2.12) и III закон Ньютона, можно получить закон сохранения момента импульса.

Рассмотрим систему из n материальных точек. Для каждой из точек можно записать свое уравнение (2.12). Мы получим систему из n таких уравнений. Если сложить левые и правые части этих уравнений, то получим уравнение, в левой части которого стоит сумма производных моментов импульса всех тел по времени, а в правой части – сумма всех моментов сил, действующих на все тела системы:

$$\sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i,j} \vec{M}_{ij}.$$

Напоминаем, что среди сил различают внутренние и внешние. По III закону Ньютона, равна нулю не только векторная сумма внутренних сил, но и векторная сумма их моментов! Это становится понятно, если вспомнить, что внутренние силы всегда возникают парами. Силы в такой паре не только одинаковы по величине и противоположны по направлению, но и действуют вдоль одной прямой, а значит, имеют одинаковое плечо! Это приводит к тому, что их моменты также будут одинаковы по величине, но противоположны по направлению и в сумме

дадут нуль. Поэтому, как и в случае с законом сохранения импульса, нас интересуют только внешние силы:

$$\sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i,j} \vec{M}_{ij} \text{ внеш.}$$

Если система замкнута (внешние силы отсутствуют) или сумма моментов внешних сил равна нулю, то:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = 0,$$

а поскольку сумма производных равна производной от суммы, то

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = 0.$$

Введем понятие момента импульса системы как векторную сумму моментов импульсов всех тел, входящих в эту систему:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i.$$

Тогда производная по времени от момента импульса системы равна нулю, т. е.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$

Отсюда следует, что $\vec{L} = \text{const}$.

Закон сохранения момента импульса формулируется так: *момент импульса системы остается постоянным тогда и только тогда, когда векторная сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю. Сумма моментов внешних сил равна нулю в двух*

случаях: а) система замкнутая (в этом случае внешние силы отсутствуют); б) внешние силы есть, но в сумме их моменты дают нуль.

Момент силы относительно оси и момент импульса относительно оси

Уравнение (2.12) – векторное. Также как и (2.10), оно верно в проекциях на любую координатную ось, а значит, в нашем трехмерном пространстве оно равносильно системе из трех независимых скалярных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dL_x}{dt} = \sum_i M_{xi}, \\ \frac{dL_y}{dt} = \sum_i M_{yi}, \\ \frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{zi}; \end{array} \right.$$

где L_x, L_y, L_z , – проекции вектора момента импульса тела на оси координат x, y и z соответственно;

$\sum_i M_{xi}$ – алгебраическая сумма проекций моментов сил на ось x

и т. п.

Проекцию вектора момента силы на некоторую ось называют моментом силы относительно этой оси (например: M_z – «момент силы относительно оси z »).

Аналогично, проекцию вектора момента импульса тела на некоторую ось называют моментом импульса тела относительно этой оси (например: L_z – «момент импульса тела относительно оси z »).

Обратите внимание: момент относительно оси – это уже не вектор, а число, которое может быть как положительным, так и отрицательным.

Таким образом, *скорость изменения момента импульса тела относительно некоторой оси равна алгебраической сумме моментов сил относительно данной оси.*

Вращение твердого симметричного тела вокруг неподвижной оси

Тело, которое не деформируется, т. е. сохраняет свою форму и размеры, называется абсолютно твердым телом. У такого тела расстояние между любыми двумя точками со временем не меняется.

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг оси z , вычисляется по формуле

$$W_k = \frac{I_z \omega^2}{2}, \quad (2.13)$$

где I_z – *момент инерции* тела относительно оси вращения;

ω – угловая скорость вращения.

Моментом инерции тела относительно оси z называется скалярная величина:

$$I_z = \sum_{i=1}^N \Delta m_i \cdot r_i^2 .$$

Здесь считается, что мы мысленно разбили тело на очень большое число N очень маленьких кусочков, каждый из которых можно считать материальной точкой, при этом

Δm_i – масса i -го кусочка;

r_i – расстояние от i -го кусочка до оси z .

На самом деле, момент инерции тела относительно оси z есть тройной интеграл, вычисляемый по всему объему тела:

$$I = \iiint_V \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) dx dy dz,$$

где $\rho(x, y, z)$ – плотность тела, в общем случае зависящая от декартовых координат x, y, z .

Момент инерции – величина аддитивная, то есть момент инерции системы из N тел относительно оси равен сумме моментов инерции всех тел системы относительно той же оси:

$$I_Z = \sum_{i=1}^N I_{Zi}.$$

Момент инерции материальной точки относительно оси z , очевидно, равен:

$$I_Z = mr^2,$$

где m – масса материальной точки;

r – расстояние от точки до данной оси.

Формулы для вычисления моментов инерции простейших симметричных абсолютно твердых тел приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Тело	Параметры тела	Ось z , относительно которой вычислен момент инерции	Момент инерции
Тонкий однородный стержень	m – масса; l – длина	Ось, проходящая перпендикулярно к стержню через его середину	$I_z = \frac{1}{12}ml^2$
		Ось, проходящая перпендикулярно к стержню через его конец	$I_z = \frac{1}{3}ml^2$
Тонкий обруч	m – масса; R – радиус	Ось, проходящая через центр перпендикулярно плоскости обруча	$I_z = mR^2$
Полый цилиндр	m – масса; R – радиус	Ось цилиндра	$I_z = mR^2$

Тело	Параметры тела	Ось z , относительно которой вычислен момент инерции	Момент инерции
Диск	m – масса; R – радиус	Ось, проходящая через центр перпендикулярно плоскости диска	$I_z = \frac{1}{2}mR^2$
Сплошной цилиндр	m – масса; R – радиус	Ось цилиндра	$I_z = \frac{1}{2}mR^2$
Сплошной шар	m – масса; R – радиус	Любая ось, проходящая через центр	$I_z = \frac{2}{5}mR^2$

При вычислении моментов инерции часто используется **теорема Штейнера**:

$$I_{O'} = I_O + ma^2, \quad (2.14)$$

где I_O – момент инерции тела относительно оси O , проходящей через центр масс тела;

$I_{O'}$ – момент инерции тела относительно параллельной оси O' , не проходящей через центр масс;

m – масса тела;

a – расстояние между осями O и O' .

В случае, если твердое тело симметрично относительно оси z , его момент импульса относительно этой оси можно вычислить по формуле:

$$L_z = I_z \omega,$$

где ω – угловая скорость вращения тела вокруг оси z .

Можно показать, что при вращении тела вокруг неподвижной оси под действием силы элементарная работа силы определяется скаляр-

ным произведением вектора момента силы \vec{M} на вектор угла поворота тела $d\vec{\phi}$:

$$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\phi} = M_z d\phi,$$

где M_z – момент силы относительно оси вращения.

Следовательно, при повороте на конечный угол ϕ :

$$A = \int_0^{\phi} M_z d\phi,$$

а если момент силы постоянен ($M_z = \text{const}$), то

$$A = M_z \phi. \quad (2.15)$$

Экспериментальная установка и метод измерения

На рис. 2.3 представлен маятник Обербека, состоящий из двух стержней и шкива радиусом R , закрепленных на горизонтальной оси вращения. По стержням могут перемещаться и симметрично закрепляются в нужном положении два (по одному на каждом стержне) груза одинаковой массы.

На шкив наматывается нить, к концу которой крепится платформа с грузом. Примем массу платформы m_1 , а массу груза m_2 , в результате общая масса $m = m_1 + m_2$.

Если груз m поднять, намотав нить на шкив, на некоторую высоту h_1 и отпустить, то груз придет в движение, а сила натяжения \vec{T}_H разматывающейся со шкива нити создаст вращающий момент сил \vec{M} . При симметричном расположении грузов на крестовине можно считать, что действующая на маятник сила тяжести приложена к точке на оси вращения, а значит ее момент равен нулю.

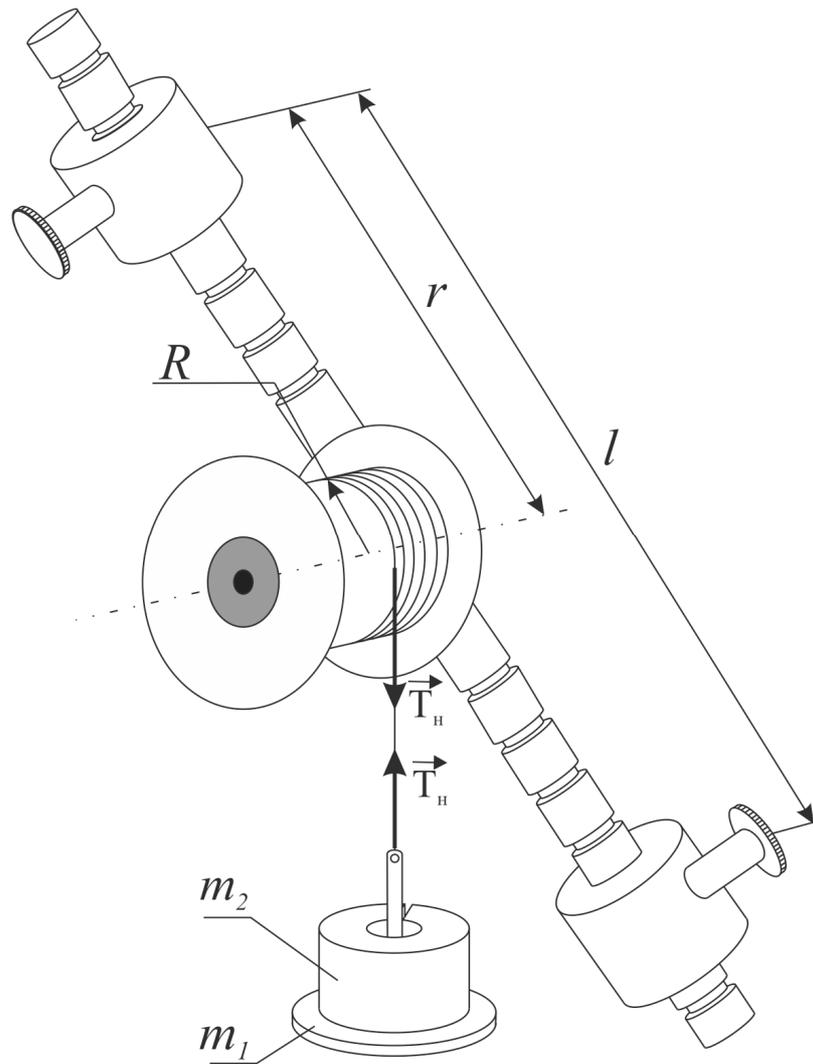


Рис. 2.3. Маятник Обербека

На рис. 2.4 представлены три основных состояния маятника Обербека. Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) неподвижная платформа с грузом находится на высоте h_1 . Полная механическая энергия груза будет определяться потенциальной энергией:

$$E_1 = mgh_1. \quad (2.16)$$

При движении груза потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию платформы с грузом и кинетическую энергию вращения маятника. В момент времени t_1 , когда платформа с грузом

подходит к нижнему положению, полная энергия системы «маятник Обербека и платформа с грузом» равна:

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad (2.17)$$

где $\frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия поступательного движения платформы с грузом;

$\frac{I\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращения маятника Обербека;

I – момент инерции маятника относительно оси вращения;

ω – угловая скорость вращения;

v – скорость движения платформы с грузом.

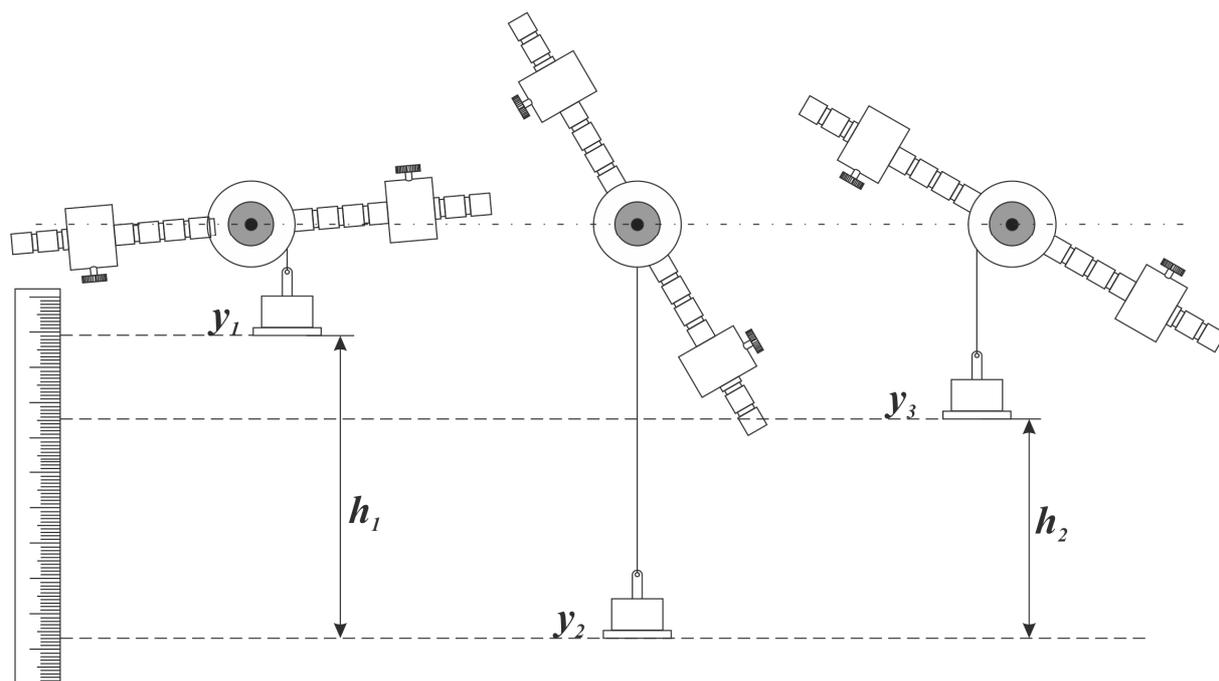


Рис. 2.4. Маятник Обербека в трех основных положениях

В крайнем положении (когда нить полностью размотана) груз с платформой продолжает двигаться вниз, вызывая деформацию упру-

гой нити. В этом случае кинетическая энергия груза переходит в потенциальную энергию деформации нити. При движении груза вверх потенциальная энергия вновь переходит в кинетическую энергию платформы с грузом.

При вращении маятника и движении груза действует сила сопротивления воздуха, а в подшипниках действуют силы трения. Сопротивлением воздуха мы пренебрегаем и считаем, что силы трения дают постоянный тормозящий момент M_{TP} . Наличие сил трения приводит к тому, что при движении маятника часть механической энергии постоянно переходит во внутреннюю энергию.

Работа силы трения при вращении маятника, в соответствии с (2.15), равна:

$$A = -M_{TP}\varphi_1, \quad (2.18)$$

где φ_1 – угол поворота шкива при перемещении платформы с грузом на расстояние h_1 ;

$$\varphi_1 = \frac{h_1}{R}, \quad (2.19)$$

где R – радиус шкива.

По закону сохранения энергии:

$$\Delta E = A, \quad (2.20)$$

где $\Delta E = E_2 - E_1$ – изменение полной энергии при переходе платформы из верхней точки в нижнюю:

$$\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \right) - mgh_1 = -M_{TP} \frac{h_1}{R}. \quad (2.21)$$

Маятник продолжает вращаться в ту же сторону и поднимает платформу с грузом на высоту h_2 , причем $h_2 < h_1$. При этом система будет обладать энергией:

$$E_3 = mgh_2. \quad (2.22)$$

Убыль полной энергии равна работе сил трения при вращении маятника на всем пути движения вниз и вверх:

$$E_3 - E_1 = -M_{\text{ТР}}\varphi, \quad (2.23)$$

где $\varphi = \frac{h_1 + h_2}{R}$ – угол поворота маятника при движении груза вниз на расстояние h_1 и вверх на расстояние h_2 , исходя из того что $\varphi_2 = \frac{h_2}{R}$, а $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

С учетом (2.22) и (2.16), выражение (2.23) записывается так:

$$mgh_2 - mgh_1 = -M_{\text{ТР}} \frac{h_1 + h_2}{R}. \quad (2.24)$$

Отсюда:

$$M_{\text{ТР}} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} mgR. \quad (2.25)$$

Так как движение маятника с грузом - равноускоренное с начальной скоростью, равной нулю, то в низшей точке скорость груза:

$$v = at_1. \quad (2.26)$$

Так как груз с платформой движутся равноускоренно, то

$$h_1 = \frac{at_1^2}{2}, \quad (2.27)$$

где a – ускорение платформы с грузом;

t_1 – время опускания груза.

Из уравнений (2.26) и (2.27) можно получить:

$$v = \frac{2h_1}{t_1}. \quad (2.28)$$

Поскольку нить при движении груза разматывается со шкива без скольжения, линейная скорость точек, лежащих на поверхности шкива, равна скорости движения груза. Известно, что угловая скорость связана с линейной скоростью движения точки по окружности равенством:

$$\omega = \frac{v}{R}. \quad (2.29)$$

Подставив значение линейной скорости (2.28) в (2.29), получим:

$$\omega = \frac{2h_1}{Rt_1}. \quad (2.30)$$

Подставив в уравнение (2.21) значения $M_{\text{ТР}}$ (2.25), v (2.28), ω (2.30), после преобразований получим расчетную формулу для вычисления момента инерции маятника Обербека:

$$I = mR^2 \left[\frac{gt_1^2 h_2}{h_1(h_1 + h_2)} - 1 \right]. \quad (2.31)$$

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Закрепите грузы на крестовинах на одинаковых расстояниях относительно оси вращения.
2. Измерьте штангенциркулем радиус шкива, с которого разматывается нить.
3. На вертикальной шкале определите верхнее положение платформы с грузом y_1 и нижнее положение платформы с грузом при

полном разматывании нити y_2 . Определите высоту опускания груза с платформой $h_1 = y_2 - y_1$ (см. рис. 2.4).

4. Отпустите платформу с грузом, засекая время.

5. Измерьте время t_1 движения платформы с грузом до полного разматывания нити и высоту поднятия груза с платформой $h_2 = y_2 - y_3$ (результаты занесите в табл. 2.2).

6. Измените симметрично расположение грузов на стержнях, меняя расстояние $r = \frac{l}{2}$.

7. Повторите опыт четыре раза (пункты 4–6).

8. По формуле (2.31) вычислите момент инерции маятника.

9. Результаты измерений и вычислений занесите в табл. 2.2.

Таблица 2.2

$h_1 =$ м		$R =$ м			$m =$ кг		
№ опыта	$l, \text{ м}$	$r, \text{ м}$	$t, \text{ с}$	$h_2, \text{ м}$	$I, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$	$r^2, \text{ м}^2$	$I_0, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$
1							
2							
3							
4							

10. Постройте в масштабе график зависимости момента инерции маятника Обербека I от квадрата расстояния r^2 закрепленных грузов до оси вращения (рис. 2.5).

11. Экспериментальные точки должны располагаться примерно вдоль прямой, но из-за случайных погрешностей будут присутствовать отклонения. Проведите прямую так, чтобы отклонения всех точек от нее в среднем были минимальны. Далее, продлите прямую до пересечения с осью ординат. Точка пересечения покажет I_0 – собственный момент инерции маятника Обербека (без грузов).

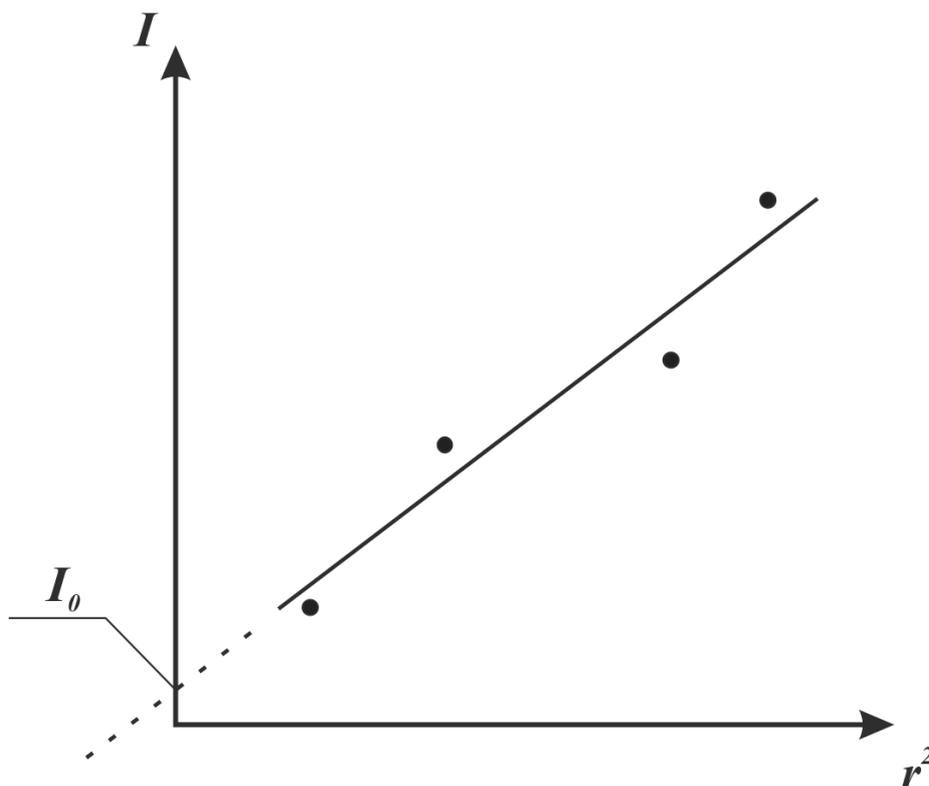


Рис. 2.5. График зависимости $I(r^2)$

12. Напишите вывод по проделанной работе и полученному результату.

Контрольные вопросы

1. Объясните зависимость момента инерции маятника от расположения грузов на стержнях.
2. Каким будет движение маятника при отсутствии трения?
3. Чему равна работа при вращательном движении?
4. Укажите значение полной механической энергии для трех важных состояний маятника Обербека.
5. Выведите расчетную формулу для момента инерции I .

Список литературы

1. Тюшев А. Н., Вылегжанина В. Д. Курс лекций по физике. Ч. 1. Механика : учеб. пособие. – Новосибирск : СГГА, 2011. – С. 53–74.

2. Савельев И. В. Курс общей физики. В 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика [Электронный ресурс] : учеб. пособие. – СПб. : Лань, 2016. – 436 с. – Режим доступа : http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=71760.

3. Трофимова Т. И. Курс физики : учеб. пособие. – М. : Академия, 2015. – 560 с.